Редеи-Бержова симетрична функција

Стефан Митровић

Математички факултет у Београду

Семинар за алгебру, математичку логику
и теорију бројева, 15. октобар 2026.

Историјат

У потрази за полиномом који би имао својство брисања и контракције, Фан Чунг и Роналд Грејем 1995. године уводе полином покривања диграфа.

У потрази за полиномом који би имао својство брисања и контракције, Фан Чунг и Роналд Грејем 1995. године уводе полином покривања диграфа.

Полином покривања $C(D; x, y)$ кодира број начина да се сви чворови диграфа D покрију међусобно дисјунктним усмереним путевима и циклусима.

Убрзо након тога, Тимоти Чоу уводи симетричну функцију путева и циклуса као природно уопштење полинома покривања.

Убрзо након тога, Тимоти Чоу уводи симетричну функцију путева и циклуса као природно уопштење полинома покривања.

Ова функција не памти само број путева и циклуса у одређеном покривању, већ памти и њихове дужине.

Историјат

Убрзо након тога, Тимоти Чоу уводи симетричну функцију путева и циклуса као природно уопштење полинома покривања.

Ова функција не памти само број путева и циклуса у одређеном покривању, већ памти и њихове дужине.

Скоро три деценије касније, Дариј Гринберг и Ричард Стенли препознају да једноставнија специјализација ове функције поседује веома лепу самосталну теорију у вези са Хамилтоновим путевима диграфа.

Убрзо након тога, Тимоти Чоу уводи симетричну функцију путева и циклуса као природно уопштење полинома покривања.

Ова функција не памти само број путева и циклуса у одређеном покривању, већ памти и њихове дужине.

Скоро три деценије касније, Дариј Гринберг и Ричард Стенли препознају да једноставнија специјализација ове функције поседује веома лепу самосталну теорију у вези са Хамилтоновим путевима диграфа.

Називају је Редеи-Бержова симетрична функција по двема теоремама које успевају да докажу користећи развој ове функције у степеној бази.

Дефиниција

Квазисиметрична функција F је формални степени ред ограниченог степена у пребројиво много променљивих $x_1, x_2, \ldots$ тако да је

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_n}^{a_n}]F = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \cdots x_{j_n}^{a_n}]F$$

кад год је $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$. Простор свих квазисиметричних функција означавамо са $QSym$.

Дефиниција

Квазисиметрична функција F је формални степени ред ограниченог степена у пребројиво много променљивих $x_1, x_2, \ldots$ тако да је

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_n}^{a_n}]F = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \cdots x_{j_n}^{a_n}]F$$

кад год је $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$. Простор свих квазисиметричних функција означавамо са $QSym$.

Пример

$M_{2,1} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + \cdots$

Фундаменталне квазисиметричне функције

Дефиниција

За $I \subseteq [n-1]$, дефинишемо фундаменталну квазисиметричну функцију F_I као

$$F_I = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ за све } j \in I}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Дефиниција

За $I \subseteq [n-1]$, дефинишемо фундаменталну квазисиметричну функцију F_I као

$$F_I = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ за све } j \in I}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Пример

За $I = \{1\}, n = 3$,

$$F_I = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + \cdots .$$

Фундаменталне квазисиметричне функције

Дефиниција

За $I \subseteq [n-1]$, дефинишемо фундаменталну квазисиметричну функцију F_I као

$$F_I = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ за све } j \in I}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Пример

За $I = \{1\}, n = 3$,

$$F_I = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + \cdots .$$

Скуп фундаменталних квазисиметричних функција даје базу простора квазисиметричних функција.

Дефиниција

Диграф $D = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а $E \subseteq V \times V$.

Дефиниција

Дограф $D = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а $E \subseteq V \times V$.

Дефиниција

Нека је $|V| = n$. $V-$листинг је било које бијективно пресликавање $\omega : [n] \to V$. Скуп свих $V-$листинга означавамо са Σ_V.

Дефиниција

Граф $D = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а $E \subseteq V \times V$.

Дефиниција

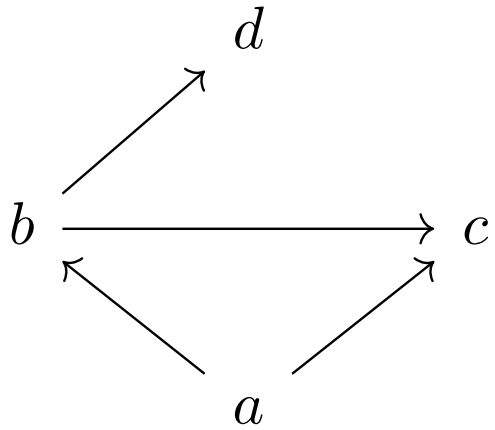
Нека је $|V| = n$. $V-$листинг је било које бијективно пресликавање $\omega : [n] \to V$. Скуп свих $V-$листинга означавамо са Σ_V.

Дефиниција

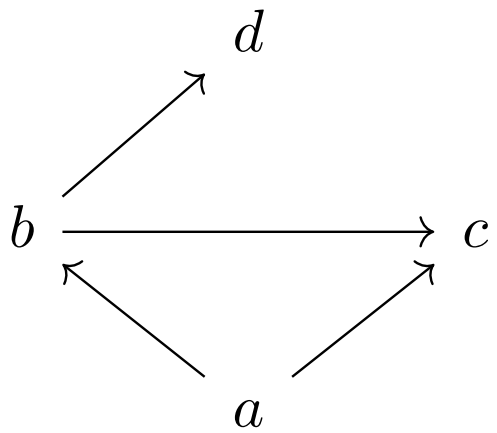
Ако је $D = (V, E)$ граф, ω један $V-$листинг, дефинишемо $D-$опадајући скуп придружен листингу ω као

$$D\mathrm{Des}(\omega) = \{1 \leq i \leq n-1 \mid (\omega_i, \omega_{i+1}) \in E\}.$$

Опадајући скуп диграфа



Опадајући скуп диграфа



Пример

Ако је $D = (\{a, b, c, d\}, \{ab, ac, bc, bd\})$ и $\omega = (a, c, b, d)$, тада је $D\mathrm{Des}(\omega) = \{1, 3\}$.

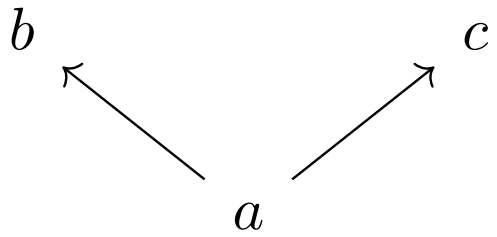
Дефиниција

Редеи-Бержова симетрична функција придружена диграфу $D = (V, E)$ је

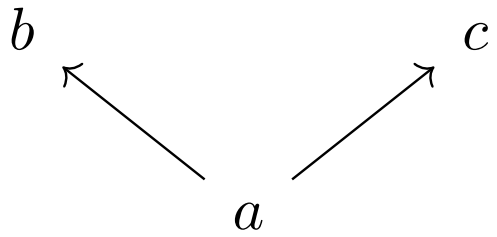
$$U_D = \sum_{\omega \in \Sigma_V} F_{D\mathrm{Des}(\omega)},$$

где смо са Σ_V означили скуп свих $V-$листинга.

Редеи-Бержова симетрична функција



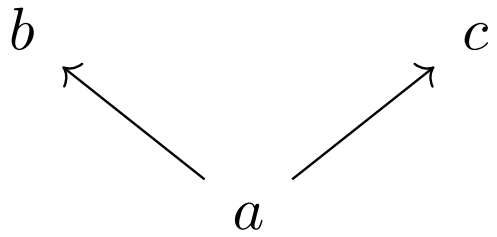
Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a, b, c) = \{1\}$

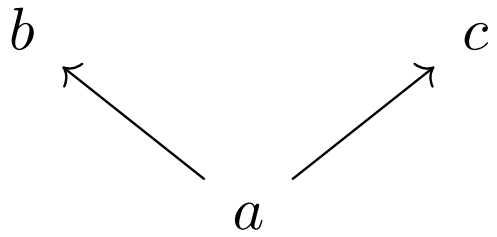
Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a,b,c) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(a,c,b) = \{1\}$

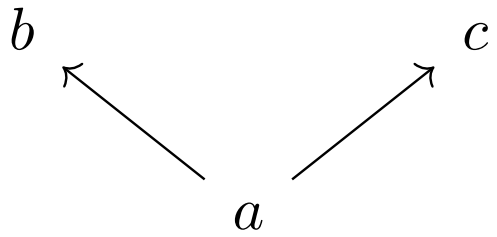
Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a, b, c) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(a, c, b) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(b, a, c) = \{2\}$

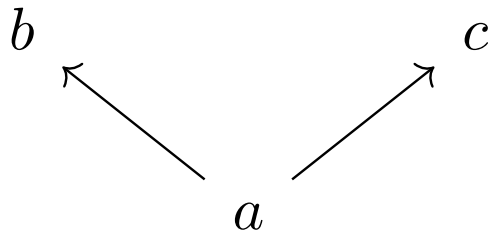
Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a,b,c) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(a,c,b) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(b,a,c) = \{2\}$
- $D\mathrm{Des}(b,c,a) = \emptyset$

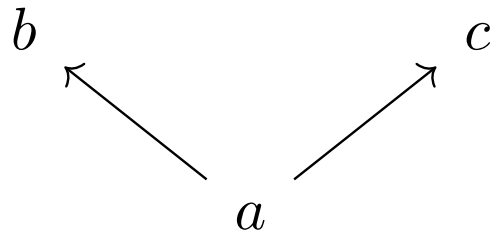
Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a,b,c) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(a,c,b) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(b,a,c) = \{2\}$
- $D\mathrm{Des}(b,c,a) = \emptyset$
- $D\mathrm{Des}(c,a,b) = \{2\}$

Редеи-Бержова симетрична функција



Пример

- $D\mathrm{Des}(a,b,c) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(a,c,b) = \{1\}$
- $D\mathrm{Des}(b,a,c) = \{2\}$
- $D\mathrm{Des}(b,c,a) = \emptyset$
- $D\mathrm{Des}(c,a,b) = \{2\}$
- $D\mathrm{Des}(c,b,a) = \emptyset$

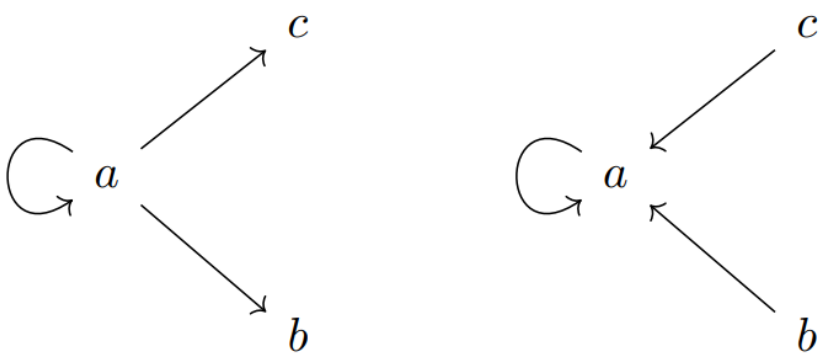
$U_X = 2(F_\emptyset + F_{\{1\}} + F_{\{2\}})$.

Дефиниција

Ако је $X = (V, E)$ дограф, тада је њему супротан дограф $X^{\mathrm{op}} = (V, E')$, где је $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E)\}$.

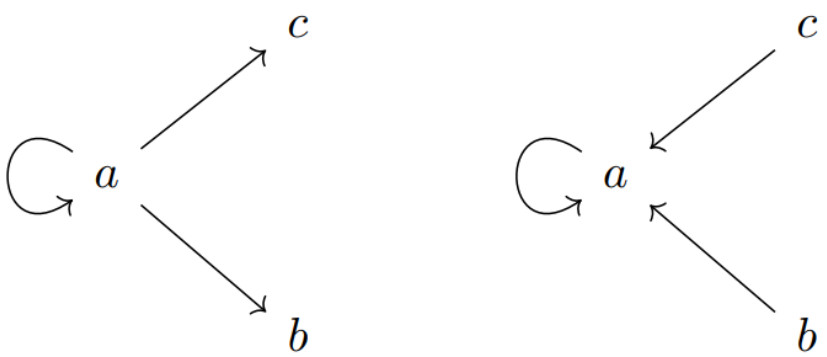
Дефиниција

Ако је $X = (V, E)$ дограф, тада је њему супротан дограф $X^{\mathrm{op}} = (V, E')$, где је $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E)\}$.



Дефиниција

Ако је $X = (V, E)$ дограф, тада је њему супротан дограф $X^{\mathrm{op}} = (V, E')$, где је $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E)\}$.



Теорема

За сваки дограф X је

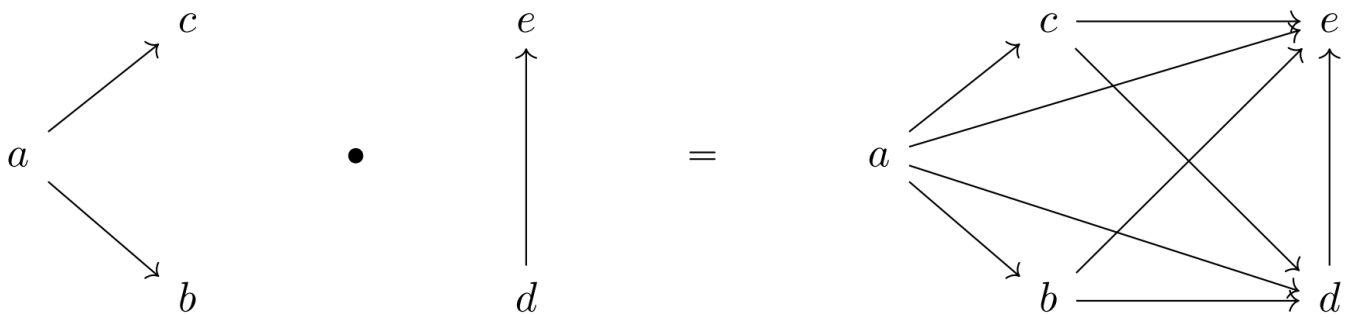
$$U_X = U_{X^{\mathrm{op}}}.$$

Дефиниција

Ако су $D_1 = (V_1, E_1)$ и $D_2 = (V_2, E_2)$ два диграфа са дисјунктним скуповима чворова, тада је њихов производ $D_1 \cdot D_2$ диграф са скупом чворова $V_1 \sqcup V_2$ и скупом грана $E_1 \sqcup E_2 \sqcup \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$.

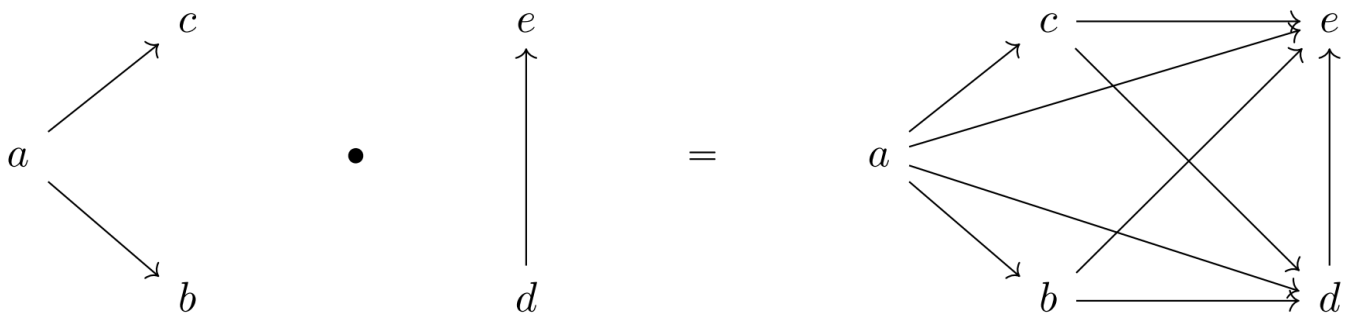
Дефиниција

Ако су $D_1 = (V_1, E_1)$ и $D_2 = (V_2, E_2)$ два диграфа са дисјунктним скуповима чворова, тада је њихов производ $D_1 \cdot D_2$ диграф са скупом чворова $V_1 \sqcup V_2$ и скупом грана $E_1 \sqcup E_2 \sqcup \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$.



Дефиниција

Ако су $D_1 = (V_1, E_1)$ и $D_2 = (V_2, E_2)$ два диграфа са дисјунктним скуповима чворова, тада је њихов производ $D_1 \cdot D_2$ диграф са скупом чворова $V_1 \sqcup V_2$ и скупом грана $E_1 \sqcup E_2 \sqcup \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$.



Теорема

$$U_{D_1 \cdot D_2} = U_{D_1} \cdot U_{D_2}.$$

Дефиниција

Симетрична функција је формални степени ред ограниченог степена у пребројиво много променљивих $x_1, x_2, \ldots$ тако да је

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_n}^{a_n}]F = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \cdots x_{j_n}^{a_n}]F$$

кад год су сви i_l међусобно различити и сви j_l међусобно различити. Простор свих симетричних функција означавамо са Sym.

Дефиниција

Симетрична функција је формални степени ред ограниченог степена у пребројиво много променљивих $x_1, x_2, \ldots$ тако да је

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_n}^{a_n}]F = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \cdots x_{j_n}^{a_n}]F$$

кад год су сви i_l међусобно различити и сви j_l међусобно различити. Простор свих симетричних функција означавамо са Sym.

Пример

$m_{2,1} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \cdots$

Дефиниција

Степена симетрична функција p_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$p_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i \quad \text{за } i \geq 1.$$

Дефиниција

Степена симетрична функција p_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$p_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Дефиниција

Степена симетрична функција p_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$p_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Пример

- $p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$

Дефиниција

Степена симетрична функција p_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$p_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Пример

- $p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$
- $p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots$

Дефиниција

Степена симетрична функција p_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$p_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Пример

- $p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$
- $p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots$
- $p_{2,1} = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 + \cdots$

Пермутације компатибилне са дирафом

Дефиниција

Ако је $D = (V, E)$ граф, тада је њему комплементаран граф $\overline{D} = (V, V \times V \setminus E)$.

Пермутације компатибилне са диграфом

Дефиниција

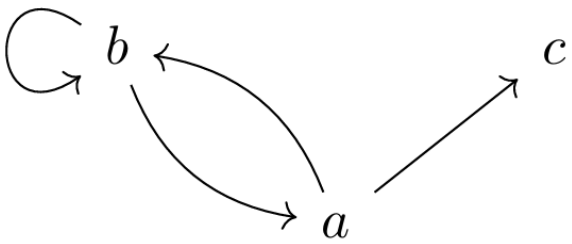
Ако је $D = (V, E)$ граф, тада је њему комплементаран граф $\overline{D} = (V, V \times V \setminus E)$.

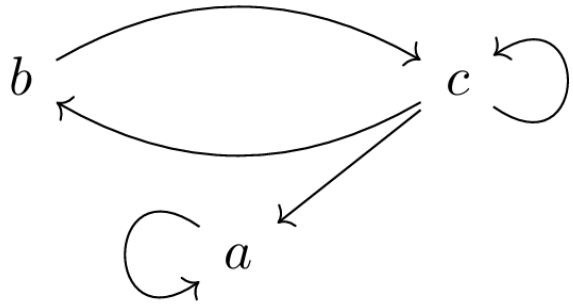
Дефиниција

Нека је $D = (V, E)$ граф и нека је $\mathbb{S}_V$ група пермутација од V. Дефинишемо

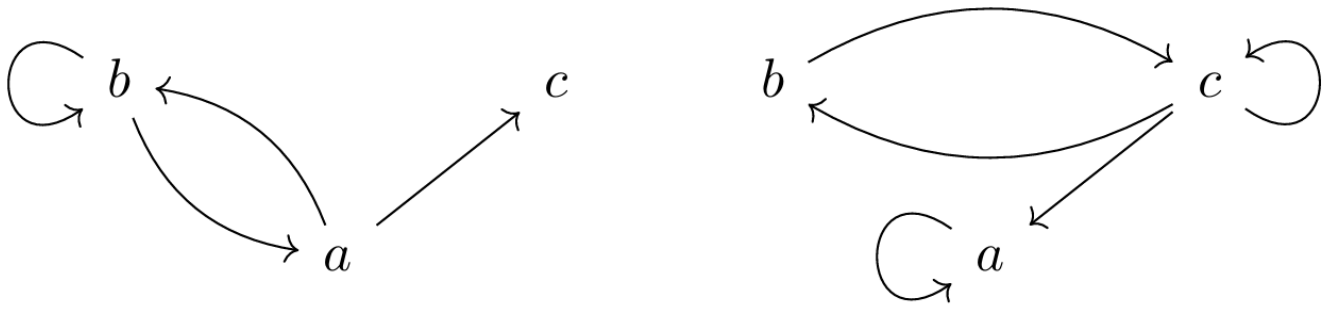
$$\mathbb{S}_V(D, \overline{D}) = \{\pi \in \mathbb{S}_V \mid \text{сваки циклус од } \pi \text{ је циклус од } D \text{ или циклус од } \overline{D}\}.$$

Пермутације компатибилне са диграфом





Пермутације компатибилне са диграфом



Пример

$(a,b)(c) \in \mathbb{S}_V(D, \overline{D})$ јер је (a,b) циклус у D, док је (c) циклус у $\overline{D}$, док $(a,c)(b) \notin \mathbb{S}_V(D, \overline{D})$ јер (a,c) није циклус ни у D, ни у $\overline{D}$.

Теорема

Нека је $D = (V, E)$ дограф. За свако $\pi \in \mathbb{S}_V$, нека је $\varphi(\pi) := \sum_\gamma (\ell(\gamma) - 1)$, где се сумација врши по свим циклусима γ од π који су циклуси од D и где $\ell(\gamma)$ означава дужину циклуса γ. Тада је

$$U_D = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_V(D, \overline{D})} (-1)^{\varphi(\pi)} p_{\mathrm{type}(\pi)}.$$

Теорема

Нека је $D = (V, E)$ дограф. За свако $\pi \in \mathbb{S}_V$, нека је $\varphi(\pi) := \sum_\gamma (\ell(\gamma) - 1)$, где се сумација врши по свим циклусима γ од π који су циклуси од D и где $\ell(\gamma)$ означава дужину циклуса γ. Тада је

$$U_D = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_V(D, \overline{D})} (-1)^{\varphi(\pi)} p_{\mathrm{type}(\pi)}.$$

Стога, U_D је не само квазисиметрична, већ и симетрична функција.

Теорема

Нека је $D = (V, E)$ дограф. За свако $\pi \in \mathbb{S}_V$, нека је $\varphi(\pi) := \sum_\gamma (\ell(\gamma) - 1)$, где се сумација врши по свим циклусима γ од π који су циклуси од D и где $\ell(\gamma)$ означава дужину циклуса γ. Тада је

$$U_D = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_V(D, \overline{D})} (-1)^{\varphi(\pi)} p_{\mathrm{type}(\pi)}.$$

Стога, U_D је не само квазисиметрична, већ и симетрична функција.

Уколико дограф D нема циклусе, тада су сви коефицијенти од U_D у степеној бази ненегативни.

Дефиниција

Хамилтонов пут диграфа $D = (V, E)$, $|V| = n$, је сваки $V-$листинг ω такав да је $D\mathrm{Des}(\omega) = [n-1]$.

Дефиниција

Хамилтонов пут диграфа $D = (V, E)$, $|V| = n$, је сваки $V-$листинг ω такав да је $D\mathrm{Des}(\omega) = [n-1]$.

Бержова теорема

Број Хамилтонових путева у D и број Хамилтонових путева у $\overline{D}$ су исте парности.

Дефиниција

Хамилтонов пут диграфа $D = (V, E)$, $|V| = n$, је сваки $V-$листинг ω такав да је $D\mathrm{Des}(\omega) = [n-1]$.

Бержова теорема

Број Хамилтонових путева у D и број Хамилтонових путева у $\overline{D}$ су исте парности.

Дефиниција

Турнир је граф $D = (V, E)$ без петљи такав да за свака два различита $u, v \in V$ важи $(u, v) \in E \veebar (v, u) \in E$.

Редеијева теорема и Бержова теорема

Дефиниција

Хамилтонов пут диграфа $D = (V, E)$, $|V| = n$, је сваки $V-$листинг ω такав да је $D\mathrm{Des}(\omega) = [n-1]$.

Бержова теорема

Број Хамилтонових путева у D и број Хамилтонових путева у $\overline{D}$ су исте парности.

Дефиниција

Турнир је дограф $D = (V, E)$ без петљи такав да за свака два различита $u, v \in V$ важи $(u, v) \in E \veebar (v, u) \in E$.

Редеијева теорема

Број Хамилтонових путева у сваком турниру је непаран.

Дефиниција

Граф $G = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а E подскуп скупа двочланих подскупова од V.

Дефиниција

Граф $G = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а E подскуп скупа двочланих подскупова од V.

Дефиниција

Правилно бојење графа $G = (V, E)$ је свако пресликавање $k : V \to \mathbb{N}$ такво да је $k(u) \neq k(v)$ кад год је u, v грана од G.

Дефиниција

Граф $G = (V, E)$ је уређени пар, где је V коначан скуп, а E подскуп скупа двочланих подскупова од V.

Дефиниција

Правилно бојење графа $G = (V, E)$ је свако пресликавање $k : V \to \mathbb{N}$ такво да је $k(u) \neq k(v)$ кад год је u, v грана од G.

Дефиниција

Хроматска функција графа $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ је

$$X_G = \sum_k x_{k(v_1)} x_{k(v_2)} \cdots x_{k(v_n)},$$

где се сумирање врши по свим правилним бојењима k од G.

Диграф посета и граф неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је $(P, \leq_P)$ неки посет, тада је

Дијаграф посета и граф неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је $(P, \leq_P)$ неки посет, тада је

- Његов дијаграф $D_P = (P, E)$, где је $E = \{(u, v) \mid u <_P v\}$.

Дијаграф посета и граф неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је $(P, \leq_P)$ неки посет, тада је

- Његов дијаграф $D_P = (P, E)$, где је $E = \{(u, v) \mid u <_P v\}$.
- Његов граф неупоредивости $\mathrm{inc}(P) = (P, E)$, где је $E = \{u, v \mid u$ и v су неупоредиви у $P\}$.

Дијаграф посета и граф неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је $(P, \leq_P)$ неки посет, тада је

- Његов дијаграф $D_P = (P, E)$, где је $E = \{(u, v) \mid u <_P v\}$.
- Његов граф неупоредивости $\mathrm{inc}(P) = (P, E)$, где је $E = \{u, v \mid u \text{ и } v \text{ су неупоредиви у } P\}$.

Пример

Ако је $P = \{a, b, c\}$ такав да је $a <_P b$ и $a <_P c$, тада:

Дијаграф посета и граф неупоредивости посета

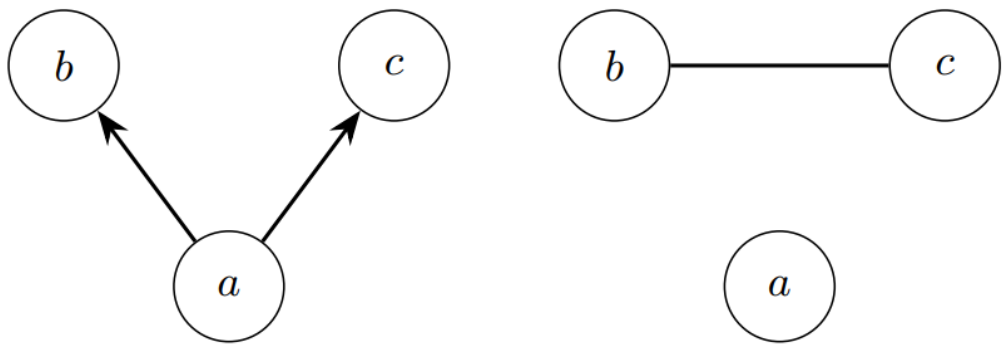
Дефиниција

Ако је $(P, \leq_P)$ неки посет, тада је

- Његов дијаграф $D_P = (P, E)$, где је $E = \{(u, v) \mid u <_P v\}$.
- Његов граф неупоредивости $\mathrm{inc}(P) = (P, E)$, где је $E = \{u, v \mid u \text{ и } v \text{ су неупоредиви у } P\}$.

Пример

Ако је $P = \{a, b, c\}$ такав да је $a <_P b$ и $a <_P c$, тада:



Веза између хроматске и Редеи-Бержове функција

Дефиниција

На простору квазисиметричних функција, дефинишемо инволуцију $\omega : QSym \to QSym$ као линеарно пресликавање задато на бази фундаменталних квазисиметричних функција. Наиме, за $I \subseteq [n-1]$, дефинишемо $\omega(F_I)$ са

$$\omega(F_I) = F_{I^c} = F_{[n-1]\setminus I}.$$

Веза између хроматске и Редеи-Бержове функција

Дефиниција

На простору квазисиметричних функција, дефинишемо инволуцију $\omega : QSym \to QSym$ као линеарно пресликавање задато на бази фундаменталних квазисиметричних функција. Наиме, за $I \subseteq [n-1]$, дефинишемо $\omega(F_I)$ са

$$\omega(F_I) = F_{I^c} = F_{[n-1]\setminus I}.$$

Теорема

Ако је P неки посет, тада је

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \omega(U_{D_P}).$$

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

- X и Y имају једнак број чворова.

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

- X и Y имају једнак број чворова.
- X и Y имају једнак број грана које нису петље.

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

- X и Y имају једнак број чворова.
- X и Y имају једнак број грана које нису петље.
- X и Y имају једнак број путева дужине k за свако k.

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

- X и Y имају једнак број чворова.
- X и Y имају једнак број грана које нису петље.
- X и Y имају једнак број путева дужине k за свако k.

Последица

- Ако су D_1 и D_2 диграфови који се састоје од дисјунктне уније путева и ако је $U_{D_1} = U_{D_2}$, тада су D_1 и D_2 изоморфни.

Шта разликује Редеи-Бержова функција

Ако је $U_X = U_Y$ за нека два диграфа X и Y, тада

- X и Y имају једнак број чворова.
- X и Y имају једнак број грана које нису петље.
- X и Y имају једнак број путева дужине k за свако k.

Последица

- Ако су D_1 и D_2 диграфови који се састоје од дисјунктне уније путева и ако је $U_{D_1} = U_{D_2}$, тада су D_1 и D_2 изоморфни.
- Ако су P_1 и P_2 посети који се састоје од дисјунктне уније ланаца и ако је $U_{P_1} = U_{P_2}$, тада су P_1 и P_2 изоморфни.

Дефиниција

За граф $G = (V, E)$ кажемо да је комплетан $k-$партитан уколико је $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ за непразне $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и $E = \{u, v \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$.

Дефиниција

За граф $G = (V, E)$ кажемо да је комплетан $k-$партитан уколико је $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ за непразне $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и $E = \{u, v \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$.

Приметимо да је комплетан $k-$партитан граф заправо граф неупоредивости посета који је дисјунктна унија k ланаца који имају редом $|V_1|, |V_2|, \ldots, |V_k|$ елемената.

Дефиниција

За граф $G = (V, E)$ кажемо да је комплетан $k-$партитан уколико је $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ за непразне $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и $E = \{u, v \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$.

Приметимо да је комплетан $k-$партитан граф заправо граф неупоредивости посета који је дисјунктна унија k ланаца који имају редом $|V_1|, |V_2|, \ldots, |V_k|$ елемената.

Последица

Ако је G комплетан $k-$партитан, а H комплетан $l-$партитан граф и ако је $X_G = X_H$, тада су G и H изоморфни.

Теорема

Ако је $X = (V, E)$ дограф и $F \subseteq E$ такав да (V, F) није дисјунктна унија путева, тада је

$$U_X = \sum_{\substack{S \subseteq F \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} U_{X \setminus S}.$$

Теорема

Ако је $X = (V, E)$ дограф и $F \subseteq E$ такав да (V, F) није дисјунктна унија путева, тада је

$$U_X = \sum_{\substack{S \subseteq F \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} U_{X \setminus S}.$$

Специјално, ако X није дисјунктна унија путева,

$$U_X = \sum_{\substack{S \subseteq E \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} U_{X \setminus S}.$$

Декомпозиција Редеи-Бержове функције

Теорема

Ако је $X = (V, E)$ дограф и $F \subseteq E$ такав да (V, F) није дисјунктна унија путева, тада је

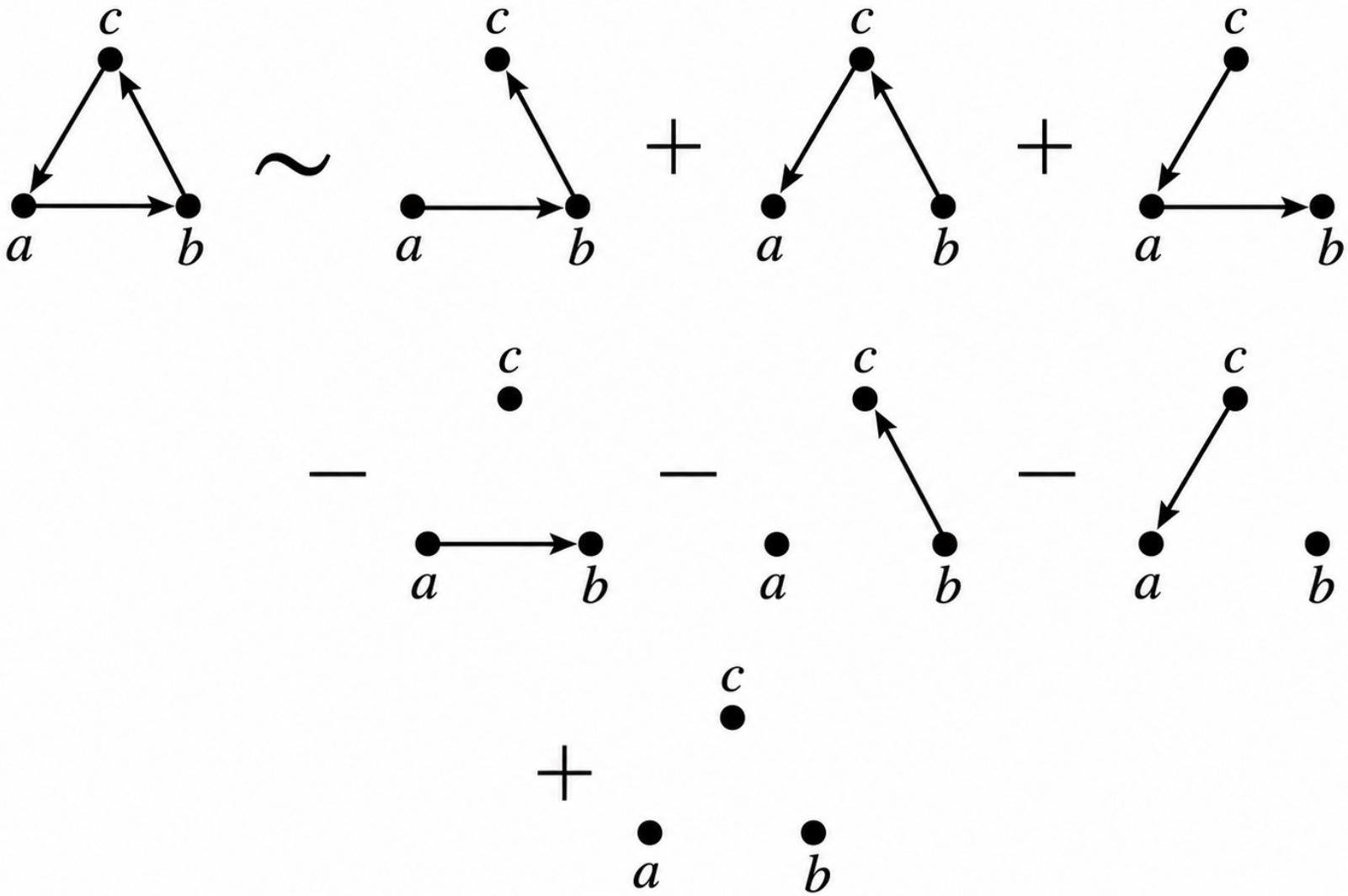
$$U_X = \sum_{\substack{S \subseteq F \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} U_{X \setminus S}.$$

Специјално, ако X није дисјунктна унија путева,

$$U_X = \sum_{\substack{S \subseteq E \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} U_{X \setminus S}.$$

Последично, Редеи-Бержова функција сваког диграфа може се изразити као линеарна комбинација Редеи-Бержових функција његових поддиграфова који су дисјунктна унија путева.

Декомпозиција Редеи-Бержове функције



Нове базе простора симетричних функција

Теорема

Скуп $\{U_X \mid X$ је дисјунктна унија путева$\}$ је линеарна база простора Sym.

Нове базе простора симетричних функција

Теорема

Скуп $\{U_X \mid X$ је дисјунктна унија путева$\}$ је линеарна база простора Sym.

Пример

- $U_{\bullet} = p_1$
- $U_{\bullet\ \bullet} = p_{1,1} + p_2$
- $U_{\bullet\to\bullet} = p_{1,1}$
- $U_{\bullet\ \bullet\ \bullet} = p_{1,1,1} + 3p_{2,1} + 2p_3$
- $U_{\bullet\to\bullet\ \bullet} = p_{1,1,1} + 2p_{2,1} + p_3$
- $U_{\bullet\to\bullet\to\bullet} = p_{1,1,1} + p_{2,1} + p_3$.

Теорема

Постоји бесконачно много низова $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ диграфова таквих да је $\{U_{X_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ алгебарска база алгебре Sym.

Теорема

Постоји бесконачно много низова $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ диграфова таквих да је $\{U_{X_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ алгебарска база алгебре Sym.

Оно што нас спречава у томе да развоје које смо добили за Редеи-Бержову функцију у потпуности преведемо на језик хроматске функције јесте то што не можемо све диграфове које смо добили у овим развојима видети као диграфове придружене посетима. Али...

Декомпозиција хроматске функције графа неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је P посет и $a, b \in P$, кажемо да b наткрива a уколико је $a <_P b$ и не постоји елемент $c \in P$ такав да је $a <_P c <_P b$,

Декомпозиција хроматске функције графа неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је P посет и $a, b \in P$, кажемо да b наткрива a уколико је $a <_P b$ и не постоји елемент $c \in P$ такав да је $a <_P c <_P b$,

Следећа теорема је директна последица декомпозиције коју смо имали за Редеи-Бержову функцију.

Декомпозиција хроматске функције графа неупоредивости посета

Дефиниција

Ако је P посет и $a, b \in P$, кажемо да b наткрива a уколико је $a <_P b$ и не постоји елемент $c \in P$ такав да је $a <_P c <_P b$,

Следећа теорема је директна последица декомпозиције коју смо имали за Редеи-Бержову функцију.

Теорема

Нека је P посет у ком $v \in P$ наткрива неке елементе $u_1, \ldots, u_k \in P$, $k \geq 2$. Ако је $F = \{u_i, v \mid i \in [k]\}$, тада је

$$X_{\mathrm{inc}(P)} = \sum_{S \subseteq F, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} X_{\mathrm{inc}(P) \cup S}.$$

Дефиниција

Елементарна симетрична функција e_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$e_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad e_i = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad \text{за } i \geq 1.$$

Дефиниција

Елементарна симетрична функција e_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$e_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad e_i = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Дефиниција

Елементарна симетрична функција e_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$e_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad e_i = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Пример

- $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$

Дефиниција

Елементарна симетрична функција e_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$e_0 = 1 \quad \text{и} \quad e_i = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Пример

- $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$
- $e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots$

Дефиниција

Елементарна симетрична функција e_i за $i \in \mathbb{N}_0$, дефинисана је као

$$e_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad e_i = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad \text{за } i \geq 1.$$

За $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, где је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, дефинишемо

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Пример

- $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$
- $e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots$
- $e_{2,1} = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 + \cdots$

Хипотеза Стенли-Стембриџ (Хикитина теорема)

Дефиниција

За посет P кажемо да је $(a+b)-$слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца са a и b елемената.

Хипотеза Стенли-Стембриџ (Хикитина теорема)

Дефиниција

За посет P кажемо да је $(a+b)-$слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца са a и b елемената.

Хипотеза-Теорема

Ако је посет P $(3+1)-$слободан, тада је $[e_\lambda]X_{\mathrm{inc}(P)} \geq 0$ за свако λ.

Хипотеза Стенли-Стембриџ (Хикитина теорема)

Дефиниција

За посет P кажемо да је $(a+b)-$слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца са a и b елемената.

Хипотеза-Теорема

Ако је посет P $(3+1)-$слободан, тада је $[e_\lambda]X_{\mathrm{inc}(P)} \geq 0$ за свако λ.

Дефиниција

Комплетна хомогена симетрична функција h_λ је $h_\lambda = \omega(e_\lambda)$.

Хипотеза Стенли-Стембриџ (Хикитина теорема)

Дефиниција

За посет P кажемо да је $(a+b)-$слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца са a и b елемената.

Хипотеза-Теорема

Ако је посет P $(3+1)-$слободан, тада је $[e_\lambda]X_{\mathrm{inc}(P)} \geq 0$ за свако λ.

Дефиниција

Комплетна хомогена симетрична функција h_λ је $h_\lambda = \omega(e_\lambda)$.

Теорема

Ако је P посет, тада је $[e_\lambda]X_{\mathrm{inc}(P)} = [h_\lambda]U_{D_P}$ за свако λ.

Дефиниција

Редеи-Бержов полином диграфа D, у ознаци u_D је главна специјализација Редеи-Бержове функције U_D, односно

$$u_D(m) = U_D(\underbrace{1, \ldots, 1,}_{m \text{ јединица}} 0, 0, \ldots).$$

Дефиниција

Редеи-Бержов полином диграфа D, у ознаци u_D је главна специјализација Редеи-Бержове функције U_D, односно

$$u_D(m) = U_D(\underbrace{1, \ldots, 1,}_{m \text{ јединица}} 0, 0, \ldots).$$

Редеи-Бержов полином поседује својство брисања и контракције које нам омогућава његово експлицитно израчунавање. Са друге стране, Редеи-Бержова функција не поседује ту особину. Међутим, могуће је увести њено уопштење у простору некомутирајућих симетричних функција, где се то својство поново јавља. Више о томе неки други пут...

Брисање и контракција гране у диграфу

Дефиниција

Ако је $D = (V, E)$ дограф и $e \in E$, тада је $D \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$. Контракцијом диграфа D по грани $e = (u, v) \in E$ добијамо дограф $D/e = (V', E')$, где је $V' = V \setminus \{u, v\} \cup \{e\}$, док E' садржи све гране у E чији крајњи чворови нису ни u ни v, док за $w \neq u, v$ узимамо

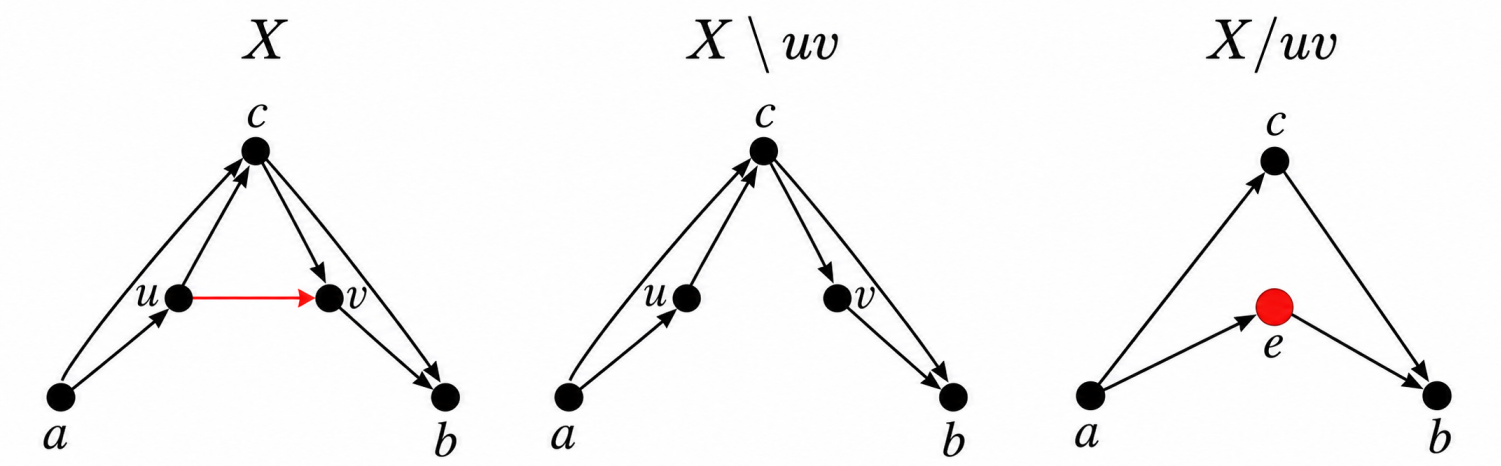
- $(w, e) \in E'$ ако и само ако је $(w, u) \in E$
- $(e, w) \in E'$ ако и само ако је $(v, w) \in E$.

Брисање и контракција гране у диграфу

Дефиниција

Ако је $D = (V, E)$ дограф и $e \in E$, тада је $D \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$. Контракцијом диграфа D по грани $e = (u, v) \in E$ добијамо дограф $D/e = (V', E')$, где је $V' = V \setminus \{u, v\} \cup \{e\}$, док E' садржи све гране у E чији крајњи чворови нису ни u ни v, док за $w \neq u, v$ узимамо

- $(w, e) \in E'$ ако и само ако је $(w, u) \in E$
- $(e, w) \in E'$ ако и само ако је $(v, w) \in E$.



Својство брисања и контракције

Теорема

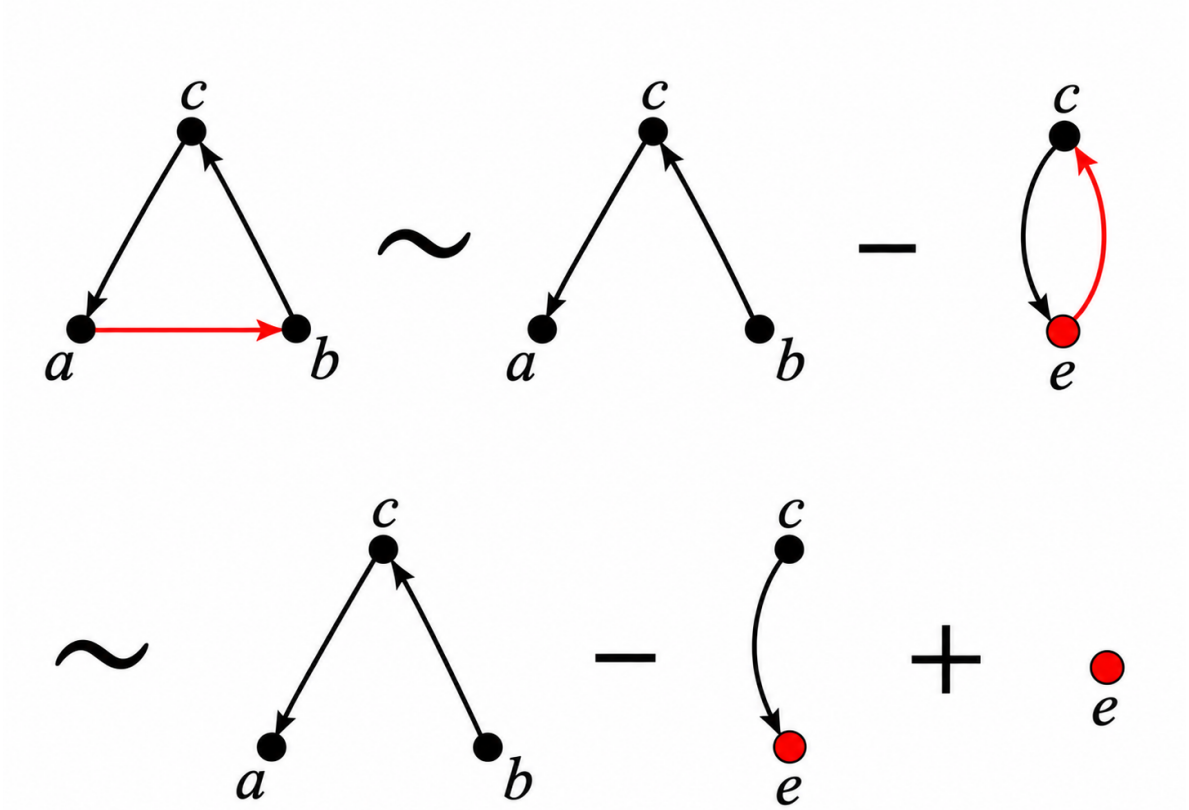
Ако је $D = (V, E)$ дограф и $e \in E$, тада је

$$u_D(m) = u_{D \setminus e}(m) - u_{D/e}(m).$$

Теорема

Ако је $D = (V, E)$ дограф и $e \in E$, тада је

$$u_D(m) = u_{D \setminus e}(m) - u_{D/e}(m).$$



Дефиниција

Хроматски полином графа G, у ознаци χ_G, је главна специјализација хроматске функције X_G, односно

$$\chi_G(m) = X_G(\underbrace{1, \ldots, 1,}_{m \text{ јединица}} 0, 0, \ldots).$$

Дефиниција

Хроматски полином графа G, у ознаци χ_G, је главна специјализација хроматске функције X_G, односно

$$\chi_G(m) = X_G(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ јединица}}, 0, 0, \ldots).$$

Другим речима, $\chi_G(m)$ је број начина да се граф G правилно обоји са m различитих боја. Хроматски полином, исто као и Редеи-Бержов има својство брисања и контракције. Веза између хроматске и Редеи-Бержове функције нам одмах обезбеђује следеће:

Обрат Редеијеве теореме за посете

Теорема

Ако је P посет, тада је

$$\chi_{\mathrm{inc}(P)}(m) = (-1)^{|P|} u_{D_P}(-m)$$

Обрат Редеијеве теореме за посете

Теорема

Ако је P посет, тада је

$$\chi_{\mathrm{inc}(P)}(m) = (-1)^{|P|} u_{D_P}(-m)$$

Последица

Ако је P посет, тада је број Хамилтонових путева у D_P непаран ако и само ако је P ланац.

Обрат Редеијеве теореме за посете

Теорема

Ако је P посет, тада је

$$\chi_{\mathrm{inc}(P)}(m) = (-1)^{|P|} u_{D_P}(-m)$$

Последица

Ако је P посет, тада је број Хамилтонових путева у D_P непаран ако и само ако је P ланац.

Доказ: Како $\chi_{\mathrm{inc}(P)}$ има целобројне коефицијенте, $\chi_{\mathrm{inc}(P)}(1)$ и $\chi_{\mathrm{inc}(P)}(-1) = (-1)^{|P|} u_{D_P}(1)$ су исте парности. Али, $u_{D_P}(1)$ је број Хамилтонових путева у $\overline{D_P}$, што је исте парности као и број Хамилтонових путева у D_P, а $\chi_{\mathrm{inc}(P)}(1)$ број правилних бојења од $\mathrm{inc}(P)$ са једном бојом, што је 1 акко је то дискретан граф (односно ако и само ако је P ланац), док је иначе 0.

ХВАЛА НА ПАЖЊИ!