Хроматска функција графа - три хипотезе

Тања Стојадиновић

Математички факултет у Београду

Семинар за алгебру, математичку логику
и теорију бројева, 17. јун 2026.

Историјат

Лондон, октобар 1852: Франсис Гутрије пита свог брата Фредерика да овај провери са својим професором, де Морганом, да ли су 4 боје довољне да се обоји било која географска карта. Де Морган није могао одмах да одговори на ово питање, па је послао писмо у Даблин, свом пријатељу Вилијаму Хамилтону. Хамилтон је одговорио да не мисли да је одговор тако очигледан... и био је у праву.

Историјат

Лондон, октобар 1852: Франсис Гутрије пита свог брата Фредерика да овај провери са својим професором, де Морганом, да ли су 4 боје довољне да се обоји било која географска карта. Де Морган није могао одмах да одговори на ово питање, па је послао писмо у Даблин, свом пријатељу Вилијаму Хамилтону. Хамилтон је одговорио да не мисли да је одговор тако очигледан... и био је у праву.

"Теорема 4 боје" доказана је тек 1976. године од стране Кенета Апела и Волфганга Хакена, при чему је у том доказу највећу улогу одиграла употреба рачунара.

Лондон, октобар 1852: Франсис Гутрије пита свог брата Фредерика да овај провери са својим професором, де Морганом, да ли су 4 боје довољне да се обоји било која географска карта. Де Морган није могао одмах да одговори на ово питање, па је послао писмо у Даблин, свом пријатељу Вилијаму Хамилтону. Хамилтон је одговорио да не мисли да је одговор тако очигледан... и био је у праву.

"Теорема 4 боје" доказана је тек 1976. године од стране Кенета Апела и Волфганга Хакена, при чему је у том доказу највећу улогу одиграла употреба рачунара.

У многобројним покушајима да се тврђење докаже развијени су разни матхематички алати, а међу њима и **хроматски полином графа.**

Хроматски полином графа

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Хроматски полином графа

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Фамилије графова које ћемо највише помињати

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Фамилије графова које ћемо највише помињати

- Комплетан граф, K_n, n чворова од којих су свака 2 повезана граном

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Фамилије графова које ћемо највише помињати

- Комплетан граф, K_n, n чворова од којих су свака 2 повезана граном
- Циклус, C_n, повезан граф са n чворова и n грана

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Фамилије графова које ћемо највише помињати

- Комплетан граф, K_n, n чворова од којих су свака 2 повезана граном
- Циклус, C_n, повезан граф са n чворова и n грана
- Дрво, T_n, повезан граф без циклуса, или повезан граф са n чворова и $n-1$ граном

$G = (V, E)$ прост граф
V - скуп чворова, E - скуп грана
Два чвора су **суседна** ако постоји грана која их повезује
Граф је повезан ако за сваки пар чворова постоји бар један низ грана који их повезује

Фамилије графова које ћемо највише помињати

- Комплетан граф, K_n, n чворова од којих су свака 2 повезана граном
- Циклус, C_n, повезан граф са n чворова и n грана
- Дрво, T_n, повезан граф без циклуса, или повезан граф са n чворова и $n-1$ граном
- Пут, P_n, дрво са n чворова, од којих су два степена 1, а остали степена 2

Бирхоф, 1912.

Правилно бојење графа G са k боја је функција

$$\mathrm{k} : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

таква да ако су чворови u и v суседни, онда је $\mathsf{k}(u) \neq \mathsf{k}(v)$.

Бирхоф, 1912.

Правилно бојење графа G са k боја је функција

$$\mathrm{k} : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

таква да ако су чворови u и v суседни, онда је $\mathsf{k}(u) \neq \mathsf{k}(v)$.

Хроматски полином $\chi_G(k)$ графа G је број начина

да правилно обојимо његове чворове се k боја.

На пример, хроматски полином комплетног графа са n чворова је

$$\chi_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1).$$

На пример, хроматски полином комплетног графа са n чворова је

$$\chi_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1).$$

Хроматски полином дрвете са n чворова је

$$\chi_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

На пример, хроматски полином комплетног графа са n чворова је

$$\chi_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1).$$

Хроматски полином дрвете са n чворова је

$$\chi_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1}.$$

Зашто је хроматски полином уопште полином по k? То се показује коришћењем својства **брисања-контракције**:

$$\chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{G/e}(k)$$

Ричард Стенли, 1995. - палета боја постаје бесконачна; мономи који ће се појавити у сумирању по правилним бојењима биће коначног степена, јер граф има коначно чворова

Ричард Стенли, 1995. - палета боја постаје бесконачна; мономи који ће се појавити у сумирању по правилним бојењима биће коначног степена, јер граф има коначно чворова

Правилно бојење графа G је функција

$$\mathrm{k} : V(G) \to \{1, 2, \ldots\}$$

таква да ако су чворови u и v суседни, онда је $\mathsf{k}(u) \neq \mathsf{k}(v)$.

Ричард Стенли, 1995. - палета боја постаје бесконачна; мономи који ће се појавити у сумирању по правилним бојењима биће коначног степена, јер граф има коначно чворова

Правилно бојење графа G је функција

$$\mathrm{k} : V(G) \to \{1, 2, \ldots\}$$

таква да ако су чворови u и v суседни, онда је $\mathsf{k}(u) \neq \mathsf{k}(v)$.

Хроматска функција X_G графа $G = (V, E)$, где је $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ је

$$X_G(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{\mathrm{k}} x_{\mathrm{k}(v_1)} x_{\mathrm{k}(v_2)} \cdots x_{\mathrm{k}(v_n)},$$

при чему се сумирање врши по свим правилним бојењима k чворова графа G.

Очигледно је да је X_G симетрична функција, која је хомогена, степена $|V|$.

Очигледно је да је X_G симетрична функција, која је хомогена, степена $|V|$.

Важи:
$\chi_G(k) = X_G(x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1; x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = 0)$

Хроматска функција графа

Очигледно је да је X_G симетрична функција, која је хомогена, степена $|V|$.

Важи:
$\chi_G(k) = X_G(x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1; x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = 0)$

Примери

- За бојење комплетног графа K_4 требају нам 4 различите боје, које онда можемо и да испермутујемо, па је

$$X_{K_4} = 24x_1x_2x_3x_4 + 24x_1x_2x_3x_5 + \cdots + 24x_3x_6x_7x_{322} + \cdots$$

Очигледно је да је X_G симетрична функција, која је хомогена, степена $|V|$.

Важи:
$\chi_G(k) = X_G(x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1; x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = 0)$

Примери

- За бојење комплетног графа K_4 требају нам 4 различите боје, које онда можемо и да испермутујемо, па је

$$X_{K_4} = 24x_1x_2x_3x_4 + 24x_1x_2x_3x_5 + \cdots + 24x_3x_6x_7x_{322} + \cdots$$

- Пут P_4 можемо обојити већ и са 2 различите боје, па је

$$X_{P_4} = 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + \cdots + 3x_1^2x_2x_3 + \cdots + 24x_1x_2x_3x_4 + \cdots$$

Примери

- Дрво, или бипартитни граф $K_{1,3}$, може се обојити са 2 боје тако да три чвора буду истобојна, а затим и са 3 и са 4:

$$X_{K_{1,3}} = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + \cdots + 3x_1^2 x_2 x_3 + \cdots + 24 x_1 x_2 x_3 x_4 + \cdots$$

У свом раду из '95. Стенли је дао развој хроматске функције у мономијалној, степеној и елементарној бази.

У свом раду из '95. Стенли је дао развој хроматске функције у мономијалној, степеној и елементарној бази.

- $$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} a_\lambda \tilde{m}_\lambda,$$

  где је a_λ број стабилних партиција π графа G таквих да је $\mathrm{type}(\pi) = \lambda$ (стабилна партиција графа $G = (V, E)$ је партиција π скупа чворова V таква да је сваки блок од π независан скуп чворова графа G), а за партицију $\lambda = (1^{r_1} 2^{r_2} \dots)$, $\tilde{m}_\lambda = r_1! r_2! \cdots m_\lambda$.

Хроматска функција графа

У свом раду из '95. Стенли је дао развој хроматске функције у мономијалној, степеној и елементарној бази.

- $$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} a_\lambda \tilde{m}_\lambda,$$

  где је a_λ број стабилних партиција π графа G таквих да је $\mathrm{type}(\pi) = \lambda$ (стабилна партиција графа $G = (V, E)$ је партиција π скупа чворова V таква да је сваки блок од π независан скуп чворова графа G), а за партицију $\lambda = (1^{r_1} 2^{r_2} \ldots)$, $\tilde{m}_\lambda = r_1! r_2! \cdots m_\lambda$.
- $$X_G = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)},$$

  при чему је $\lambda(S)$ партиција броја $|V|$ чији су делови једнаки величинама компонената повезаности графа $G_S = (V, S)$.

- $$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda e_\lambda,$$

  где је

  $$\sum_{\substack{\lambda \vdash |V| \\ l(\lambda)=j}} c_\lambda = \mathrm{sink}(G, j),$$

  а $\mathrm{sink}(G, j)$ је број ацикличних оријентација графа G са j сливника.

- $$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda e_\lambda,$$

  где је

  $$\sum_{\substack{\lambda \vdash |V| \\ l(\lambda)=j}} c_\lambda = \mathrm{sink}(G, j),$$

  а $\mathrm{sink}(G, j)$ је број ацикличних оријентација графа G са j сливника.

За симетричну функцију кажемо да је $e-$позитивна ако се

може написати као линеарна комбинација елементарних функција са позитивним коефицијентима.

Примери

Из претходног примера је јасно да је

$$X_{K_4} = 24e_4,$$

а важиће и

$$X_{K_n} = n!e_n.$$

Дакле, хроматска функција комплетног графа је $e-$позитивна (кажемо и да је комплетан граф $e-$позитиван).
С друге стране,

$$X_{K_{1,3}} = 4e_4 + 5e_{31} - 2e_{22} + e_{211}$$

није $e-$позитивна, и $K_{1,3}$ је најмањи граф чија хроматска функција није $e-$позитивна.

Ако је P коначан посет, тада је његов граф неупоредивости, у ознаци $\mathrm{inc}(P)$, граф са скупом чворова P, где су $u, v \in P$ спојени граном акко су неупоредиви у посету P.

Ако је P коначан посет, тада је његов граф неупоредивости, у ознаци $\mathrm{inc}(P)$, граф са скупом чворова P, где су $u, v \in P$ спојени граном акко су неупоредиви у посету P.

Приметимо да је $K_{1,3}$ заправо граф неупоредивости четвороелементног посета који се састоји од два дисјунктна неупоредива ланца дужина 1 и 3.

Ако је P коначан посет, тада је његов граф неупоредивости, у ознаци $\mathrm{inc}(P)$, граф са скупом чворова P, где су $u, v \in P$ спојени граном акко су неупоредиви у посету P.

Приметимо да је $K_{1,3}$ заправо граф неупоредивости четвороелементног посета који се састоји од два дисјунктна неупоредива ланца дужина 1 и 3.

За посет кажемо да је $(a+b)$-слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца дужина a и b.

Стенли-Стембриџ хипотеза, '93.

Ако је посет P $(3+1)$-слободан, тада је $\mathrm{inc}(P)$ e-позитиван.

Стенли-Стембриџ хипотеза, '93.

Ако је посет P $(3+1)$-слободан, тада је $\mathrm{inc}(P)$ e-позитиван.

Фамилије графова за које ова хипотеза важи укључују:

- комплетне графове
- путеве
- циклусе
- K - ланце

Методе доказивања

- Волфгангов критеријум: Ако је повезан граф G који има n чворова e-позитиван, тада за сваку партицију $\lambda \vdash n$ постоји повезана партиција од G која је типа λ.
- Троструко брисање (Орелана, Скот, 2014): Ако су e_1, e_2 и e_3 гране графа G које формирају троугао, онда је

$$X_G = X_{G \setminus \{e_1\}} + X_{G \setminus \{e_2\}} - X_{G \setminus \{e_1, e_2\}}$$

- k - брисање (Далберг, ван Вилигенбург, 2018): Ако су $e_1, e_2, \ldots, e_k$ гране графа G које формирају циклус дужине k за $k \geq 3$, онда је

$$\sum_{S \subset [k-1]} (-1)^{|S|} X_{G - \cup_{i \in S} \{e_i\}} = 0$$

Методе доказивања

- Уопштења: Квазисиметрична хроматска функција (Шарешиан-Вахс, 2016)
  Некомутативна хроматска симетрична функција (Гебхард-Сејган, 2001)
- Хезенбергови варијетети

Хикитин доказ из 2024: комбинаторна формула за Шарешиан-Вахс функцију која користи вероватноће придружене стандардним Јанговим таблоима

Стенли-Стембриџ хипотеза

Хикитин доказ из 2024: комбинаторна формула за Шарешиан-Вахс функцију која користи вероватноће придружене стандардним Јанговим таблоима

-Ипак идемо даље...

Стенли је у свом раду из '95. дао пример 2 неизоморфна графа на 5 чворова који имају исте хроматске функције. Такође, видели смо да сва дрвета са n чворова имају исти хроматски полином. Међутим, остаје отворена

Хипотеза о разликовању дрвета (Стенли '95.)

Ако су T_1 и T_2 два дрвета, онда $X_{T_1} = X_{T_2}$ ако и само ако су T_1 и T_2 изоморфни.

Хипотеза о разликовању дрвета

Проверено је да ово важи за сва дрвета закључно са 29 чворова. Такође, доказано је да важи за неке фамилије дрвета, на пример за гусенице (то су путеви чији су поједини чворови спојени са додатним чворовима степена 1) (Мартин, Морин, Вагнер, 2008.)

Хипотеза о разликовању дрвета

Роза Орелана и њени сарадници су 2025. доказали релацију "брисање-близу-контракција" која омогућава да хроматску функцију било ког графа изразимо преко хроматских функција звезда-графова, а као последицу су добили алгоритам за реконструкцију произвољног дрвета дијаметра ≤ 6 из његове хроматске функције.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

У поменутом раду Стенли је приметио да су дрвета веома ретко $e-$позитивна. То су касније проверили ван Вилигенбург и њени сарадници: за дрвета закључно са 13 чворова број e-позитивних за сваку појединачну кардиналност скупа чворова не прелази 5, а у већини случајева тај број је 1 (то је одговарајући пут). Они су зато формулисали следећу хипотезу

У поменутом раду Стенли је приметио да су дрвета веома ретко $e-$позитивна. То су касније проверили ван Вилигенбург и њени сарадници: за дрвета закључно са 13 чворова број e-позитивних за сваку појединачну кардиналност скупа чворова не прелази 5, а у већини случајева тај број је 1 (то је одговарајући пут). Они су зато формулисали следећу хипотезу

Хипотеза о (не)позитивности дрвета (Далберг, Ши, ван Вилигенбург, 2020)

Ако дрво садржи чвор степена ≥ 4, његова хроматска симетрична функција није e-позитивна.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Главни метод овде је свођење на паукове, а онда примена Волфганговог критеријума.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Главни метод овде је свођење на паукове, а онда примена Волфганговог критеријума.

Уколико је $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \vdash n - 1$, где је $d \geq 3$, под пауком $S(\lambda)$ подразумевамо стабло од n чворова које се састоји од d дисјунктних путева $P_{\lambda_1}, \ldots, P_{\lambda_d}$ (које називамо ногама) и чвора (који називамо центар) који је суседан са тачно једним листом сваког пута.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Главни метод овде је свођење на паукове, а онда примена Волфганговог критеријума.

Уколико је $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \vdash n-1$, где је $d \geq 3$, под пауком $S(\lambda)$ подразумевамо стабло од n чворова које се састоји од d дисјунктних путева $P_{\lambda_1}, \ldots, P_{\lambda_d}$ (које називамо ногама) и чвора (који називамо центар) који је суседан са тачно једним листом сваког пута.

Зашто су нам паукови значајни?

Важи:

Нека је T дрво са чвором v степена $d \geq 3$ и $(t_1, \ldots, t_d)$ партиција чији делови одговарају величинама компоненената повезаности $(T_1, \ldots, T_d)$ од $T \setminus v$. Уколико T има повезану партицију типа μ, тада и $S = S(t_1, \ldots, t_d)$ има повезану партицију типа μ.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

За паукове постоји читав низ критеријума позитивности, међу којима и следећи:

Сваки паук са бар 3 ноге непарне дужине нема савршено упаривање, па није e-позитиван.

Нека је $\lambda \vdash (n-1)$ партиција за коју је $l(\lambda) \geq 3$ и нека је m највећи део од λ. Уколико је $m < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, тада паук $S = S(\lambda)$ није e-позитиван.

Ако је $\lambda \vdash N$, m највећи део партиције λ и $m < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, а $N > i \geq 0$, тада паук $S(i, \lambda)$ није e-позитиван.

Далберг, Ши и ван Вилигенбург су 2020. доказали:

Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова за који важи $d \geq \log_2 n + 1$. Тада S није e-позитиван.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Далберг, Ши и ван Вилигенбург су 2020. доказали:

Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова за који важи $d \geq \log_2 n + 1$. Тада S није e-позитиван.

Последица:

Ако дрво T са n чворова садржи чвор степена d, где је $d \geq \log_2 n + 1$, тада T није e-позитиван граф.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Зенг је 2022. значајно појачао овај резултат.

Ако дрво садржи чвор степена ≥ 6, његова хроматска симетрична функција није e-позитивна.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Зенг је 2022. значајно појачао овај резултат.

Ако дрво садржи чвор степена ≥ 6, његова хроматска симетрична функција није e-позитивна.

Фостер Том је прошле године додатно спустио ову границу.

Ако дрво садржи чвор степена ≥ 5, или чвор степена 4 који није сусед ниједном листу, његова хроматска функција није e-позитивна.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Последица

Пауци са 4 ноге нису e-позитивни.

Хипотеза о (не)позитивности дрвета

Последица

Пауци са 4 ноге нису e-позитивни.

То је то за данас :)

ХВАЛА

СВИМА КОЈИ СУ ДОШЛИ НА ОВО ПРЕДАВАЊЕ

ХВАЛА

СВИМА КОЈИ СУ ДОШЛИ НА ОВО ПРЕДАВАЊЕ

И ХВАЛА

СЛАВКУ КОЈИ ЈЕ ОВАКО ЛЕПО И УСПЕШНО ВОДИО НАШ СЕМИНАР ОВЕ ГОДИНЕ!